

Pochodne cząstkowe. Pochodna kierunkowa. Różniczka funkcji wielu zmiennych.

Anna Bahyrycz

Definicja 1

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem zmiennej x w punkcie (x_0, y_0) nazywamy granicę

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

o ile istnieje i oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ lub $f'_x(x_0, y_0)$.

Definicja 1

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) .
Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem zmiennej x w punkcie (x_0, y_0) nazywamy granicę

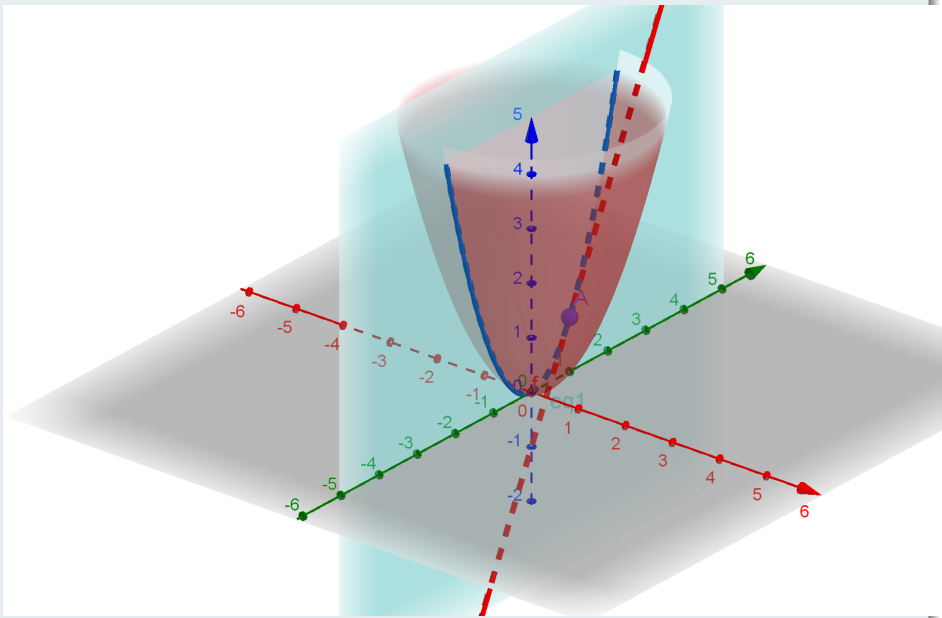
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

o ile istnieje i oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ lub $f'_x(x_0, y_0)$.

Pochodną cząstkową pierwszego rzędu funkcji f względem zmiennej y w punkcie (x_0, y_0) nazywamy granicę

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

o ile istnieje i oznaczamy symbolem $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ lub $f'_y(x_0, y_0)$.



Uwaga 1

Jeżeli granica określająca pochodną jest właściwa (niewłaściwa) to, mówimy, że pochodna jest właściwa (niewłaściwa).

Uwaga 1

Jeżeli granica określająca pochodną jest właściwa (niewłaściwa) to, mówimy, że pochodna jest właściwa (niewłaściwa).

Uwaga 2

Nie ma żadnego związku między ciągłością funkcji a istnieniem pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji w punkcie.

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0 \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0 \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0 \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ oraz $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0 \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ oraz $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$ - badana granica nie istnieje.

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dla } xy = 0 \\ 0 & \text{dla } xy \neq 0 \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

Niech $(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$ oraz $(x'_n, y'_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, oczywiście

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, 0\right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{n}, 0\right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x'_n, y'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0, 0) \quad \text{i} \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \neq (0, 0) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N}.$$

Wówczas $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$ - badana granica nie istnieje.

Funkcja f ma obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w $(0, 0)$ i nie jest ciągła w tym punkcie.

Przykład 2

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Przykład 2

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Badamy istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} - \text{granica nie istnieje,}$$

Przykład 2

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Badamy istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} - \text{granica nie istnieje,}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} - \text{granica nie istnieje,}$$

czyli funkcja f nie ma pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu w $(0, 0)$.

Przykład 2

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Badamy istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} - \text{granica nie istnieje,}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} - \text{granica nie istnieje,}$$

czyli funkcja f nie ma pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu w $(0, 0)$.

Badamy ciągłość

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

Funkcja f jest ciągła w $(0, 0)$.

Przykład 2

Zbadać istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu i ciągłość funkcji

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Badamy istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} - \text{granica nie istnieje,}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(\Delta y)^2} - 0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} - \text{granica nie istnieje,}$$

czyli funkcja f nie ma pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu w $(0, 0)$.

Badamy ciągłość

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0).$$

Funkcja f jest ciągła w $(0, 0)$.

Z ciągłości funkcji w punkcie nie wynika istnienie pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu w tym punkcie.

Definicja 2

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^2$, to funkcje

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \quad \text{gdzie } (x, y) \in U$$

nazywamy *pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu funkcji f na zbiorze U* i oznaczmy $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ lub f'_x , f'_y .

Uwaga 3

W praktyce do liczenia pochodnych cząstkowych można stosować reguły różniczkowania funkcji jednej zmiennej.

Przykład 3

Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{na zbiorze } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

Przykład 3

Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{na zbiorze } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1}$$

Przykład 3

Wyznaczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{na zbiorze } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x, \quad \text{gdzie } (x, y) \in U.$$

Definicja 3

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0).$$

Definicja 3

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) (x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) (x_0, y_0).$$

Powyższe pochodne oznacza się również odpowiednio przez

$$f''_{xx}(x_0, y_0), f''_{xy}(x_0, y_0), f''_{yx}(x_0, y_0), f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Definicja 4

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe drugiego rzędu w każdym punkcie zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^2$, to funkcje

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \quad \text{gdzie } (x, y) \in U$$

nazywamy *pochodnymi cząstkowymi drugiego rzędu funkcji f na zbiorze U*

i oznaczmy $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ lub f''_{xx} , f''_{xy} , f''_{yx} , f''_{yy} .

Twierdzenie 1 (Schwarza o pochodnych mieszanych)

Jeżeli pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) , to są równe, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Twierdzenie 1 (Schwarza o pochodnych mieszanych)

Jeżeli pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

są ciągłe w punkcie (x_0, y_0) , to są równe, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Uwaga 4

Prawdziwe są także analogiczne równości dla pochodnych mieszanych drugiego rzędu funkcji trzech zmiennych, a także dla pochodnych mieszanych wyższych rzędów.

Przykład 4

Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{na zbiorze } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

Sprawdzić, że pochodne mieszane są równe.

Przykład 4

Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{na zbiorze } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

Sprawdzić, że pochodne mieszane są równe.

Wyznaczymy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x, \quad \text{gdzie } (x, y) \in U.$$

Przykład 4

Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{na zbiorze } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

Sprawdzić, że pochodne mieszane są równe.

Wyznaczymy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x, \quad \text{gdzie } (x, y) \in U.$$

Wyznaczymy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^y (\ln x)^2,$$

Przykład 4

Wyznaczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$f(x, y) = x^y, \quad \text{na zbiorze } U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}.$$

Sprawdzić, że pochodne mieszane są równe.

Wyznaczamy pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = yx^{y-1} \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \ln x, \quad \text{gdzie } (x, y) \in U.$$

Wyznaczamy pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^y (\ln x)^2,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \text{gdzie } (x, y) \in U.$$

Definicja 5

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu $n \geq 2$ przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) . Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) pochodnych cząstkowych rzędu n funkcji f nazywamy **pochodnymi cząstkowymi rzędu $n + 1$ funkcji f w punkcie (x_0, y_0)** .

Jeżeli funkcja f ma pochodne cząstkowe rzędu n w każdym punkcie zbioru otwartego, to mówimy, że na tym zbiorze określone są pochodne cząstkowe rzędu n funkcji f .

Pochodną cząstkową n -tego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) , powstałą w wyniku k -krotnego różniczkowania względem zmiennej x i następnie l -krotnego różniczkowania względem zmiennej y gdzie $k + l = n$, oznaczamy przez

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^l \partial x^k}(x_0, y_0).$$

Przykład 5

Dla funkcji

$$f(x, y) = e^{xy} \quad \text{obliczyć} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y).$$

Przykład 5

Dla funkcji

$$f(x, y) = e^{xy} \quad \text{obliczyć} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y).$$

Wyznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy},$$

Przykład 5

Dla funkcji

$$f(x, y) = e^{xy} \quad \text{obliczyć} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y).$$

Wyznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy},$$

następnie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy}$$

Przykład 5

Dla funkcji

$$f(x, y) = e^{xy} \quad \text{obliczyć} \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y).$$

Wyznaczamy

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy},$$

następnie

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(xe^{xy}) = e^{xy} + xye^{xy}$$

i na koniec

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{xy}(1 + xy)) = y(1 + xy)e^{xy} + ye^{xy} = e^{xy}y(2 + xy).$$

Definicja 6 (Pochodna kierunkowa funkcji)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz $\vec{v} = (v_x, v_y)$ będzie wektorem. **Pochodną kierunkową** funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku \vec{v} określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Definicja 6 (Pochodna kierunkowa funkcji)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz $\vec{v} = (v_x, v_y)$ będzie wektorem. **Pochodną kierunkową** funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku \vec{v} określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Przykład 6

Korzystając z definicji obliczyć pochodną kierunkowa funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2, \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Definicja 6 (Pochodna kierunkowa funkcji)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz $\vec{v} = (v_x, v_y)$ będzie wektorem. **Pochodną kierunkową** funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku \vec{v} określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Przykład 6

Korzystając z definicji obliczyć pochodną kierunkowa funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2, \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1, 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3}{t}$$

Definicja 6 (Pochodna kierunkowa funkcji)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz $\vec{v} = (v_x, v_y)$ będzie wektorem. **Pochodną kierunkową** funkcji f w punkcie (x_0, y_0) w kierunku \vec{v} określamy wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) := \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + tv_x, y_0 + tv_y) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Przykład 6

Korzystając z definicji obliczyć pochodną kierunkowa funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2, \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1, 1)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2\left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 + t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3\left(1 + t\sqrt{2} + \frac{1}{2}t^2\right) - 3}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(3\sqrt{2} + \frac{3}{2}t\right) = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Przykład 7

Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(0, 0)$ w kierunku

- (a) wektora $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; (b) dowolnego wektora $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

Przykład 7

Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(0, 0)$ w kierunku

(a) wektora $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; (b) dowolnego wektora $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(0 - \frac{3}{5}t, 0 + \frac{4}{5}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{9}{25}t^2 + \frac{16}{25}t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1. \end{aligned}$$

Przykład 7

Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(0, 0)$ w kierunku

(a) wersora $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; (b) dowolnego wersora $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(0 - \frac{3}{5}t, 0 + \frac{4}{5}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{9}{25}t^2 + \frac{16}{25}t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0 - tv_x, 0 + tv_y) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1. \end{aligned}$$

Przykład 7

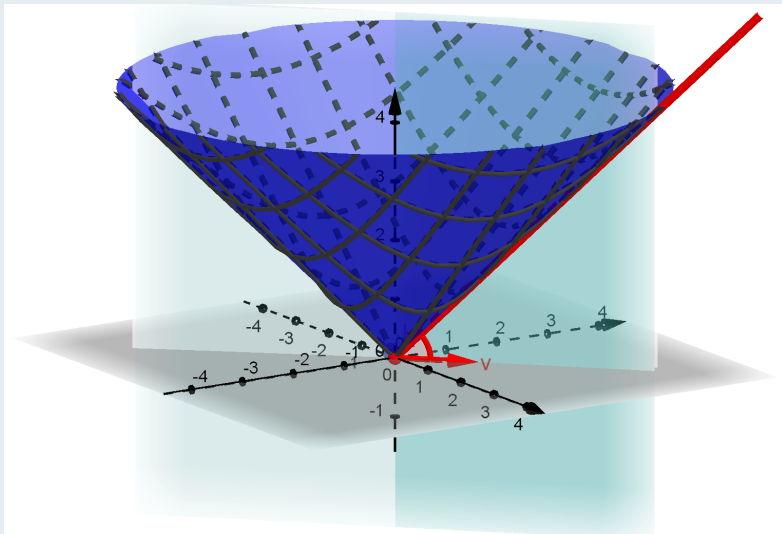
Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(0, 0)$ w kierunku

(a) wektora $\vec{v} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; (b) dowolnego wektora $\vec{v} = (v_x, v_y)$.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f\left(0 - \frac{3}{5}t, 0 + \frac{4}{5}t\right) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{9}{25}t^2 + \frac{16}{25}t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0 - tv_x, 0 + tv_y) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{v_x^2 t^2 + v_y^2 t^2} - 0}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1. \end{aligned}$$

Pochodna kierunkowa funkcji $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ w punkcie $(0, 0)$ w kierunku dowolnego wektora istnieje i wynosi 1.



Definicja 7 (Gradient funkcji)

Gradientem funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor określony wzorem:

$$\mathbf{grad}f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Definicja 7 (Gradient funkcji)

Gradientem funkcji f w punkcie (x_0, y_0) nazywamy wektor określony wzorem:

$$\mathbf{grad}f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Twierdzenie 2

Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ są funkcjami ciągłymi w punkcie (x_0, y_0) oraz \vec{v} jest dowolnym wektorem na płaszczyźnie, to

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \mathbf{grad}f(x_0, y_0) \circ \vec{v}.$$

Wróćmy do Przykładu 6.

Przykład 8

Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Wróćmy do Przykładu 6.

Przykład 8

Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ są funkcjami ciągłymi,

Wróćmy do Przykładu 6.

Przykład 8

Obliczyć pochodną kierunkowa funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ są funkcjami ciągłymi, zatem

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1) = \mathbf{grad} f(1, 1) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Wróćmy do Przykładu 6.

Przykład 8

Obliczyć pochodną kierunkową funkcji

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \text{ w punkcie } (1, 1) \text{ w kierunku wektora } \vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$ są funkcjami ciągłymi, zatem

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1, 1) = \mathbf{grad} f(1, 1) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = (4, 2) \circ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

Do Przykładu 7 nie możemy zastosować Twierdzenia 2, ponieważ pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie $(0, 0)$ nie istnieją.

Definicja 8 (Różniczkowalność funkcji)

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0) . Mówimy, że funkcja f jest *różniczkowalna* w (x_0, y_0) , gdy

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zaczniemy od policzenia pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu funkcji f punkcie $(0, 0)$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0),$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ i pozostaje zbadać czy istnieje i ile wynosi

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ i pozostaje zbadać czy istnieje i ile wynosi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ i pozostaje zbadać czy istnieje i ile wynosi

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ i pozostaje zbadać czy istnieje i ile wynosi

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - h \cdot 0 - k \cdot 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2} =? \quad (*) \end{aligned}$$

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ i pozostaje zbadać czy istnieje i ile wynosi

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - h \cdot 0 - k \cdot 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2} =? \quad (*) \end{aligned}$$

Niech $(h_n, k_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right) = (0, 0)$ i $\left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right) \neq (0, 0)$ dla $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{a^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{1 + a^2} = \frac{a^2}{1 + a^2} \quad \text{- zależy od } a,$$

Korzystając z definicji zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{w punkcie } (x_0, y_0) = (0, 0).$$

Zatem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ i pozostaje zbadać czy istnieje i ile wynosi

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(h, k) - f(0, 0) - h \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) - k \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \\ &= \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - h \cdot 0 - k \cdot 0}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{hk}{h^2 + k^2} =? \quad (*) \end{aligned}$$

Niech $(h_n, k_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right)$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right) = (0, 0)$ i $\left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right) \neq (0, 0)$ dla $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{a}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{a^2}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^2}{1 + a^2} = \frac{a^2}{1 + a^2} \quad \text{- zależy od } a,$$

a stąd granica (*) nie istnieje, co oznacza, że badana funkcja nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$.

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie to jest ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie 5 (warunek konieczny różniczkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 5

Funkcja z Przykładu 1 nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie jest ciągła w tym punkcie.

Twierdzenie 5 (warunek konieczny różniczkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 5

Funkcja z Przykładu 1 nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 6

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 3 nie jest prawdziwe.

Twierdzenie 5 (warunek konieczny różniczkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 5

Funkcja z Przykładu 1 nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 6

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 3 nie jest prawdziwe.

Funkcja z Przykładu 2 jest ciągła w punkcie $(0,0)$ a nie jest w tym punkcie różniczkowalna, bo nie istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie $(0,0)$.

Twierdzenie 5 (Warunek konieczny różniczkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 5

Funkcja z Przykładu 1 nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 6

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 3 nie jest prawdziwe.

Funkcja z Przykładu 2 jest ciągła w punkcie $(0,0)$ a nie jest w tym punkcie różniczkowalna, bo nie istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie $(0,0)$.

Twierdzenie 4 (Warunek wystarczający różniczkowalności funkcji)

Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ są funkcjami ciągłymi w punkcie (x_0, y_0) , to funkcja f jest różniczkowalna w tym punkcie.

Twierdzenie 5 (Warunek konieczny różniczkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja jest różniczkowalna w punkcie to jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 5

Funkcja z Przykładu 1 nie jest różniczkowalna w punkcie $(0,0)$, bo nie jest ciągła w tym punkcie.

Uwaga 6

Twierdzenie odwrotne do Twierdzenia 3 nie jest prawdziwe.

Funkcja z Przykładu 2 jest ciągła w punkcie $(0,0)$ a nie jest w tym punkcie różniczkowalna, bo nie istnieją pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie $(0,0)$.

Twierdzenie 4 (Warunek wystarczający różniczkowalności funkcji)

Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ są funkcjami ciągłymi w punkcie (x_0, y_0) , to funkcja f jest różniczkowalna w tym punkcie.

Uwaga 7

Funkcje z Przykładów 5 i 6 są różniczkowalne w każdym punkcie \mathbb{R}^2 .

Interpretacja geometryczna funkcji różniczkowalnej w punkcie

Różniczkowalność funkcji f w punkcie (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna (niepionowa) do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Interpretacja geometryczna funkcji różniczkowalnej w punkcie

Różniczkowalność funkcji f w punkcie (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna (niepionowa) do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Twierdzenie 5

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie (x_0, y_0) .

Wówczas płaszczyzna styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ma postać:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Przykład 10

Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + y^2} \quad \text{w punkcie } P = \left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Przykład 10

Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg}x}{1 + y^2} \quad \text{w punkcie } P = \left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{1 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\operatorname{arctg}x \cdot \frac{2y}{(1 + y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

Przykład 10

Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + y^2} \quad \text{w punkcie } P = \left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{1 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\operatorname{arctg} x \cdot \frac{2y}{(1 + y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1) + 0 \cdot (y - 0)$$

Przykład 10

Napisać równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + y^2} \quad \text{w punkcie } P = \left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{1}{1 + y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1, 0) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\operatorname{arctg} x \cdot \frac{2y}{(1 + y^2)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 0) = 0.$$

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1) + 0 \cdot (y - 0)$$

Zatem

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

jest równaniem płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji f w punkcie P .

